Universidad Simón Bolívar
Departamento de Física

Física 1 (FS-1111)
1^{er} Examen Parcial 20 %
Enero-Marzo 2010

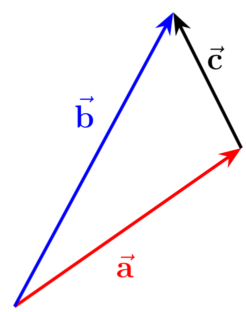
Instrucciones:

- Cada respuesta incorrecta resta 1 pto de la calificación final.
- Utilice el valor numérico de la aceleración de la gravedad como $||\vec{\mathbf{g}}|| = 10\, m/seg^2$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

Selección Simple//Cada pregunta tiene un valor de 2 ptos.

1. Dados los vectores $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ y $\vec{\mathbf{c}}$ de la figura, podemos afirmar que:



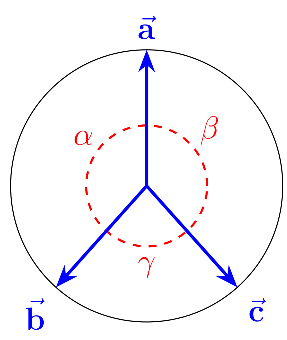
   a) $\vec{\mathbf{c}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}}$.

   b) $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{c}}$.

   c) $\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}}$.

   d) $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{c}} = -\vec{\mathbf{b}}$.

2. Los ángulos α, β y γ son iguales entre sí y el radio de la circunferencia es un (1) metro, entonces la magnitud de $(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{c}})$ es:



   a) $1\, m$.

   b) $2\, m$.

   c) $(\sqrt{3} - 1)\, m$.

   d) 0.

3. Si $\vec{\mathbf{B}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}$, entonces si $\hat{\mathbf{B}}$ y $\hat{\mathbf{C}}$ son los vectores unitarios respectivos, $||\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{C}}||$ vale:

   a) $\frac{1}{2}$.

   b) 0.

c) 1.

d) $\dfrac{\sqrt{22}}{44}$.

4. Sea α el ángulo entre los vectores $\vec{\mathbf{Q}}$ y $\vec{\mathbf{T}}$ que satisfacen las relaciones $||\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{T}}||=\sqrt{3}||\vec{\mathbf{Q}}||$ y $||\vec{\mathbf{Q}}||=||\vec{\mathbf{T}}||$, entonces $\sin\alpha$ vale:

   a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   b) $\dfrac{1}{2}$.

   c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   d) $-\dfrac{1}{2}$.

Desarrollo

1. Un vehículo experimental que se encuentra inicialmente en reposo es acelerado uniformemente durante 10 segundos hasta alcanzar una velocidad máxima de 360 km/h. Durante los siguientes 5 segundos el vehículo se mantiene a esa velocidad y luego se aplican los frenos (aceleración constante) logrando detenerlo completamente 5 segundos más tarde:

   a) ¿Cuál fue la rapidez promedio del vehículo de prueba? (3 ptos.).

   b) Haga un gráfico de la posición (x) del vehículo en función del tiempo durante todo el recorrido indicando en el mismo los valores numéricos más importantes (3 ptos.).

2. Un objeto (**A**) es lanzado verticalmente hacia arriba desde el piso con rapidez inicial de 20 m/seg. En ese mismo instante se lanza un segundo objeto (**B**), también verticalmente hacia arriba pero desde una altura de 20 m. Si ambos objetos llegan al piso en el mismo instante.

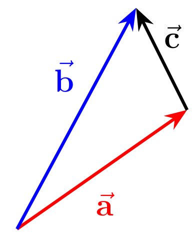
   a) ¿Cuál es la velocidad del segundo objeto al llegar al piso? (3 ptos.).

   b) Haga un gráfico de la velocidad , $\vec{\mathbf{v}}$, de cada uno de los objetos en función del tiempo indicando en el mismo los valores numéricos más importantes (3 ptos.).

SOLUCIÓN

Selección Simple//Ejercicio 1

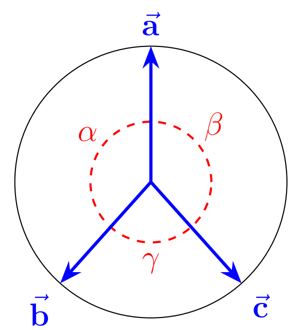
> Dados los vectores $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ y $\vec{\mathbf{c}}$ de la figura, podemos afirmar que:
>
> *b)* $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{c}}$.



Sumamos los vectores gráficamente: punta con cola. Así, podemos observar que si unimos la cola del vector $\vec{\mathbf{a}}$ con la punta del vector $\vec{\mathbf{c}}$, obtenemos el vector $\vec{\mathbf{b}}$. Esto quiere decir que $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{b}}$.Por lo tanto, $\boxed{\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{c}}}$.

Selección Simple//Ejercicio 2

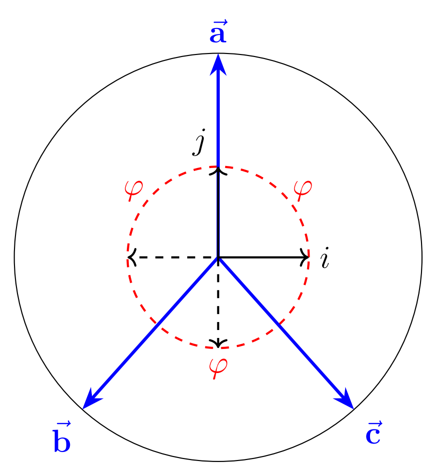
> Los ángulos α, β y γ son iguales entre sí y el radio de la circunferencia es un (1) metro, entonces la magnitud de $(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{c}})$ es:
>
> *b)* $2\,m$.



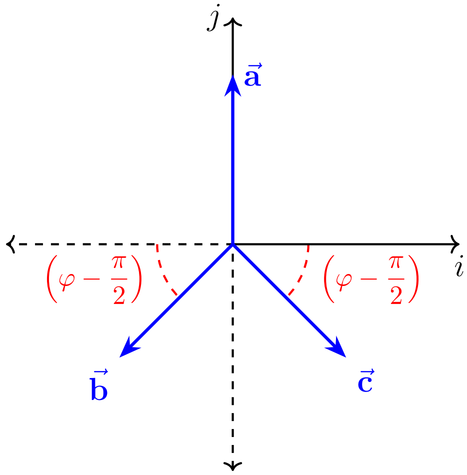
Sabemos que en una circunferencia cualquiera se tiene un ángulo de 2π y, dado que tiene radio $R = 1\,m$, se cumple que $||\vec{\mathbf{a}}|| = ||\vec{\mathbf{b}}|| = ||\vec{\mathbf{c}}|| = 1\,m$. Ahora, como α, β y γ son iguales entre sí, podemos decir que $\alpha = \beta = \gamma = \varphi$; y se cumple que:

$$\alpha + \beta + \gamma = \varphi + \varphi + \varphi = 3\varphi = 2\pi \Longrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

Para determinar el módulo de $(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{c}})$, necesitamos conocer el vector en cuestión. Lo primero que hacemos es plantear un sistema de referencia conveniente: en este caso, en el centro de la circunferencia dada.



Nos enfocamos únicamente en los vectores.



Tenemos entonces que los vectores, respecto al referencial elegido, son:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{a}} = R\hat{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{b}} = R\left[-\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\hat{\mathbf{i}} - \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\hat{\mathbf{j}}\right] \\ \vec{\mathbf{c}} = R\left[\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\hat{\mathbf{i}} - \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\hat{\mathbf{j}}\right] \end{cases}$$

Realizamos la suma $(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{c}})$ y sustituimos el valor de φ.

$$\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{c}} = R\left[1 + 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right]\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{c}} = R(1 + 2\sin 30°)\hat{\mathbf{j}} = R(1+1)\hat{\mathbf{j}} = (2\,m)\hat{\mathbf{j}} \Longrightarrow \boxed{||\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{c}}|| = 2\,m}$$

Selección Simple//Ejercicio 3

Si $\vec{\mathbf{B}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}$, entonces si $\hat{\mathbf{B}}$ y $\hat{\mathbf{C}}$ son los vectores unitarios respectivos, $||\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{C}}||$ vale:

c) 1.

Sea θ el ángulo entre $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{C}}$, en especial entre $\hat{\mathbf{B}}$ y $\hat{\mathbf{C}}$, aplicamos la definición del producto vectorial: $\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{C}} = ||\hat{\mathbf{B}}||.||\hat{\mathbf{C}}||.\sin\theta\hat{\mathbf{u}}$ con $\hat{\mathbf{u}} \perp \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$; tal que $||\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{C}}|| = ||\hat{\mathbf{B}}||.||\hat{\mathbf{C}}||.\sin\theta$ con $||\hat{\mathbf{B}}|| = ||\hat{\mathbf{C}}|| = 1$ puesto que son vectores unitarios. Así, basta con calcular el valor de θ para calcular lo solicitado; para ello utilizaremos la doble definición del producto punto.

$$\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{C}} = (-3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}) \cdot (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) = ||\vec{\mathbf{B}}||.||\vec{\mathbf{C}}||.\cos\theta$$

$$(-3)(1) + (3)(1) = 0 = ||\vec{\mathbf{B}}||.||\vec{\mathbf{C}}||.\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Entonces,

$$||\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{C}}|| = (1)(1)\sin\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \boxed{||\hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{C}}|| = 1}$$

Selección Simple//Ejercicio 4

Sea α el ángulo entre los vectores $\vec{\mathbf{Q}}$ y $\vec{\mathbf{T}}$ que satisfacen las relaciones $||\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{T}}||=\sqrt{3}||\vec{\mathbf{Q}}||$ y $||\vec{\mathbf{Q}}||=||\vec{\mathbf{T}}||$, entonces $\sin\alpha$ vale:

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Para calcular α, aplicaremos la definición del producto punto $||\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{T}}|| = \sqrt{(\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{T}})\cdot(\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{T}})}$ recordando que el producto punto es distributivo. Entonces,

$$||\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{T}}|| = \sqrt{(\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{T}})\cdot(\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{T}})} = \sqrt{(\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{T}})\cdot\vec{\mathbf{Q}}+(\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{T}})\cdot\vec{\mathbf{T}}}$$
$$||\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{T}}|| = \sqrt{\vec{\mathbf{Q}}\cdot\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{Q}}\cdot\vec{\mathbf{T}}+\vec{\mathbf{T}}\cdot\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{T}}\cdot\vec{\mathbf{T}}} = \sqrt{||\vec{\mathbf{Q}}||^2+\vec{\mathbf{Q}}\cdot\vec{\mathbf{T}}+\vec{\mathbf{T}}\cdot\vec{\mathbf{Q}}+||\vec{\mathbf{T}}||^2}$$

Como $\vec{\mathbf{Q}}\cdot\vec{\mathbf{T}}=\vec{\mathbf{T}}\cdot\vec{\mathbf{Q}}$, propiedad del producto punto, y $||\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{T}}||=\sqrt{3}||\vec{\mathbf{Q}}||$ y $||\vec{\mathbf{Q}}||=||\vec{\mathbf{T}}||$, las condiciones del enunciado; tenemos que

$$||\vec{\mathbf{Q}}+\vec{\mathbf{T}}|| = \sqrt{||\vec{\mathbf{Q}}||^2+\vec{\mathbf{Q}}\cdot\vec{\mathbf{T}}+\vec{\mathbf{Q}}\cdot\vec{\mathbf{T}}+||\vec{\mathbf{Q}}||^2} = \sqrt{2||\vec{\mathbf{Q}}||^2+2||\vec{\mathbf{Q}}||.||\vec{\mathbf{T}}||\cos\alpha}$$
$$\sqrt{3}||\vec{\mathbf{Q}}|| = \sqrt{2||\vec{\mathbf{Q}}||^2+2||\vec{\mathbf{Q}}||^2\cos\alpha} = \sqrt{2}||\vec{\mathbf{Q}}||\sqrt{1+\cos\alpha} \Longrightarrow \sqrt{3}=\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\alpha} \Longrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2}$$

Para determinar $\sin\alpha$, aplicamos la identidad fundamental de la trigonometría.

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2+\sin^2\alpha = 1 \Longrightarrow \boxed{\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Desarrollo//Ejercicio 1

Un vehículo experimental que se encuentra inicialmente en reposo es acelerado uniformemente durante 10 segundos hasta alcanzar una velocidad máxima de 360 km/h. Durante los siguientes 5 segundos el vehículo se mantiene a esa velocidad y luego se aplican los frenos (aceleración constante) logrando detenerlo completamente 5 segundos más tarde:

a) ¿Cuál fue la rapidez promedio del vehículo de prueba? (3 ptos.).

Sabemos que la rapidez promedio viene dada por $\Delta v = d/\Delta t$ donde d y Δt son la distancia total recorrida y el tiempo que transcurrió respectivamente; tal que basta con conocer dichas cantidades para determinar Δv. Como el cuerpo cambia de aceleración en tres instantes, debemos analizar tres intervalos: (**A**) cuando acelera por $10 seg$ hasta alcanzar a los $360 km/h$, (**B**) cuando mantiene su velocidad constante por $5\, seg$ y (**C**) cuando desacelera hasta detener después de $5\ seg$..

Tiempo total Δt: Basta con sumar los tres instantes correspondiente a cada intervalos. Así, $\Delta t = (10 + 5 + 5)\ seg = 20\ seg$.

Distancia total d: Consideremos las ecuaciones de cinemática(prescindiremos de la notación vectorial bajo la suposición de que el movimiento es unidimensional). Sea v_o y r_o la rapidez y la posición inicial respectivamente, tenemos que:

$$\begin{cases} v_{(t)} = (v_o + at)\ m/seg \\ \\ r_{(t)} = \left(r_o + v_o t + \dfrac{1}{2}at^2\right)\ m \end{cases}$$

Veamos cuánto recorrió el vehículo en cada instante:

A: Tenemos que $r_o = 0 = v_o$ y que $v_{(10)} = 360\ km/h$. Para calcular d_A, necesitamos la aceleración a_A; basta entonces con resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} v_{(10)} = 360\ km/h = a(10\ seg) \\ \\ r_A = \dfrac{1}{2}a(10\ seg)^2 \end{cases}$$

Cuya solución es $a_A = 10\ m/seg^2$ y $r_A = 500\ m$.

B: Tenemos que $a_B = 0$, $r_o = 500\ m$ y $v_o = 360\ km/h = 100\ m/seg$. Calculamos r_B.

$$r_B = r_{(5)} = 500\ m + 100\ m/seg(5\ seg) = 1000\ m$$

C: Tenemos que $v_{20} = 0$, $a < 0$ puesto que está desacelerando, $v_o = 100\ m/seg$ y $r_o = 1000\ m$. Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} v_{(20)} = 0 = 100\ m/seg - a_C(5\ seg) \\ \\ r_C = 1000\ m + (100\ m/seg)(5\ seg) - \dfrac{1}{2}a_C(5\ seg)^2 \end{cases}$$

Cuya solución es $a_C = 20\,m/seg^2$ y $r_C = 1250\,m$.

Finalmente, como el vehículo no se devuelve, podemos asegurar que $d = r_C$; tal que la rapidez media es entonces

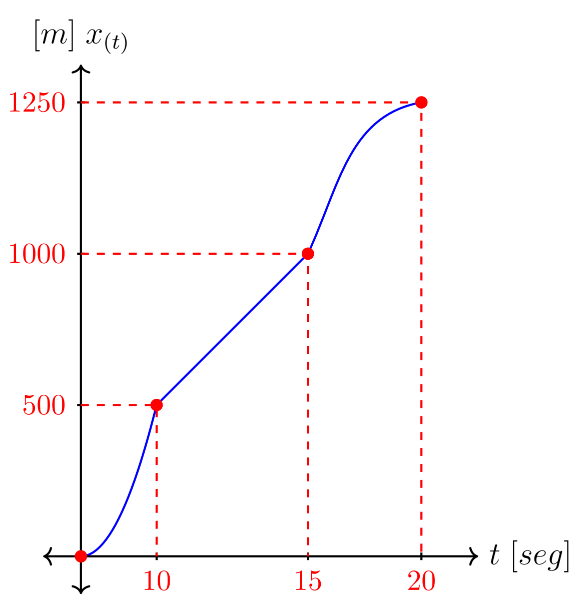
$$\Delta v = \frac{1250\,m}{20\,seg} \Longrightarrow \boxed{\Delta v = \frac{125}{2}\,m/seg = 62,5\,m/seg}$$

b) Haga un gráfico de la posición (x) del vehículo en función del tiempo durante todo el recorrido indicando en el mismo los valores numéricos más importantes (3 ptos.).

Para graficar la posición (x) del vehículo en función del tiempo, basta con obtener las ecuación de $\vec{\mathbf{r}}_{(t)}$ en los tres instantes: debemos analizar tres intervalos: (**A**) cuando acelera por 10 *seg* hasta alcanzar a los 360 km/h, (**B**) cuando mantiene su velocidad constante por 5 *seg* y (**C**) cuando desacelera hasta detener después de 5 *seg*. Retomando lo utilizado en el inciso anterior, tenemos la siguiente función a trozo:

$$\begin{cases} x_{A(t)} = \dfrac{1}{2}(10\,m/seg^2)t^2 = (5\,m/seg^2)t^2 \\ \\ x_{B(t)} = 500\,m + (100\,m/seg)t \\ \\ x_{C(t)} = 1000\,m + (100\,m/seg)t - \dfrac{1}{2}(20\,m/seg^2)t^2 = 1000\,m + (100\,m/seg)t - (10\,m/seg^2)t^2 \end{cases}$$

Graficamos entonces cada trozo en una misma gráfica. Denotaremos cuatro puntos importantes: $t = 0$ cuando el vehículo está en reposo, $t = 10\,seg$ cuando el vehículo se mueve con velocidad constante, $t = 15\,seg$ cuando aplica los frenos y $t = 20\,seg$ cuando el vehículo se detiene.



Desarrollo//Ejercicio 2

Un objeto (**A**) es lanzado verticalmente hacia arriba desde el piso con rapidez inicial de $20\,m/seg$. En ese mismo instante se lanza un segundo objeto (**B**), también verticalmente hacia arriba pero desde una altura de $20\,m$. Si ambos objetos llegan al piso en el mismo instante.

a) ¿Cuál es la velocidad del segundo objeto al llegar al piso? (3 ptos.).

Como ambos cuerpos son lanzados verticalmente hacia arriba, tenemos que ambos cumplen con las siguientes ecuaciones de movimiento donde $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$ y $\vec{\mathbf{v}}_o$ y $\vec{\mathbf{r}}$ son la velocidad y la posición inicial respectivamente.

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{v}}_{(t)} = \vec{\mathbf{v}}_o + \vec{\mathbf{a}}t \\ \\ \vec{\mathbf{r}}_{(t)} = \vec{\mathbf{r}}_o + \vec{\mathbf{v}}_o t + \dfrac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2 \end{cases}$$

Conocemos la velocidad con que fue lanzado **A** y nos solicitan determinar la velocidad con loa que **B** llega al piso. Partiremos de que ambos objetos llegan al piso al mismo tiempo y procederemos de la siguiente manera: con la información que tenemos de **A** hallamos el tiempo en que **A** llega al piso y con el determinamos la velocidad de **B**. Tenemos que las ecuaciones de movimiento de **A** son:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{v}}_{A(t)} = [20\,m/seg - (10m/seg^2)t]\hat{\mathbf{j}} \\ \\ \vec{\mathbf{r}}_{A(t)} = [(20\,m/seg)t - (5m/seg^2)t^2]\hat{\mathbf{j}} \end{cases}$$

Entonces, sabemos que en un tiempo $t = t'$, se cumple que $\vec{\mathbf{r}}^A_{(t')} = \vec{\mathbf{0}}$; calculamos t'

$$[(20\,m/seg)t' - (5m/seg^2)(t')^2]\hat{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{0}} \Longrightarrow (20\,m/seg)t' - (5m/seg^2)(t')^2 = 0 \Longrightarrow t' = 4\,seg$$

Ahora, con las ecuaciones de **B**, basta con sustituir $t = t' = 4\,seg$ para determinar $\vec{\mathbf{v}}_{B(t')} = \vec{\mathbf{v}}^B_f$.

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{v}}_{B(t)} = [v^B_o - (10m/seg^2)t]\hat{\mathbf{j}} \\ \\ \vec{\mathbf{r}}_{B(t)} = [20\,m + v^B_o t - (5m/seg^2)t^2]\hat{\mathbf{j}} \end{cases}$$

$$t = t' = 4\,seg \Longrightarrow \begin{cases} \vec{\mathbf{v}}_{B(t')} = [v^B_o - (10m/seg^2)(4\,seg)]\hat{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{r}}_{B(t')} = \vec{\mathbf{0}} = [20\,m + v^B_o(4\,seg) - (5m/seg^2)(4\,seg)^2]\hat{\mathbf{j}} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} v^B_f = v^B_o - (10m/seg^2)(4\,seg) \\ 0 = 20\,m + v^B_o(4\,seg) - (5m/seg^2)(4\,seg)^2 \end{cases}$$

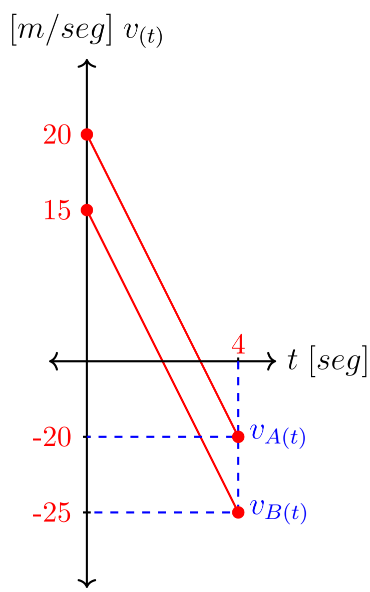
Cuya solución es $v^B_o = 15\,m/seg$ y $\boxed{\vec{\mathbf{v}}^B_f = -(25\,m/seg)\hat{\mathbf{j}}}$.

b) Haga un gráfico de la velocidad , $\vec{\mathbf{v}}$, de cada uno de los objetos en función del tiempo indicando en el mismo los valores numéricos más importantes (3 ptos.).

Para graficar las velocidades v_A y v_B en función del tiempo, basta con trazar las dos rectas que las describen. Retomando lo utilizado en el inciso anterior, tenemos las siguiente funciones:

$$v_{A(t)} = 20\, m/seg - (10 m/seg^2)t$$
$$v_{B(t)} = 15\, m/seg - (5 m/seg^2)t$$

Graficamos entonces las dos funciones denotando los puntos de $t = 0$ de sus velocidades iniciales y $t\!=\!4\ seg$ cuando alcanzan su velocidades finales.



Nota: Este parcial fue resuelto por Oscar González y digitalizado por Asxel Ramirez para GECOUSB.

Asxel Ramirez
18-10322
Lic. Química
Twitter: @asx.0088

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com